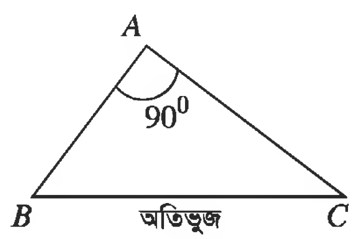
তৃতীয় অধ্যায়
জ্যামিতি

অষ্টম ও নবম–দশম শ্রেণির জ্যামিতিতে পীথাগোরাসের উপপাদ্য ও এর বিপরীত উপপাদ্য নিয়ে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে। গণিত শিক্ষায় পীথাগোরাস সংক্রান্ত বিষয়াবলী অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে। তাই মাধ্যমিক উচ্চতর গণিতে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের আলোকে অধিকতর আলোচনা আবশ্যক। এ সংক্রান্ত আলোচনার জন্য 'লম্ব অভিক্ষেপ' সম্পর্কে সুস্পষ্ট ধারণা থাকা দরকার। সে লক্ষে এই পর্যায়ে প্রথম অংশে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের সংক্ষিপ্ত আলোচনা, দ্বিতীয় পর্যায়ে লম্ব অভিক্ষেপের ধারণা এবং পীথাগোরাসের উপপাদ্যের অনুসিদ্ধান্ত নিয়ে আলোচনা করা হবে। আলোচনার শেষ অংশে পীথাগোরাস এবং এর বিস্তৃতির ধারণার উপর ভিত্তি করে যুক্তিমূলক আলোচনা ও প্রমাণের জন্য কিছু সমস্যা অন্তর্ভুক্ত করা হবে।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা –

- লম্ব অভিক্ষেপের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- পিথাগোরাসের উপপাদ্যের উপর ভিত্তি করে প্রদত্ত উপপাদ্যগুলো প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু সম্পর্কিত উপপাদ্যগুলো প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্য প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- টলেমির উপপাদ্য প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবে।

৩ (ক) পীথাগোরাস সর্ম্পকিত আলোচনা



চিত্র ৩.১ সমকোণী ত্রিভুজ

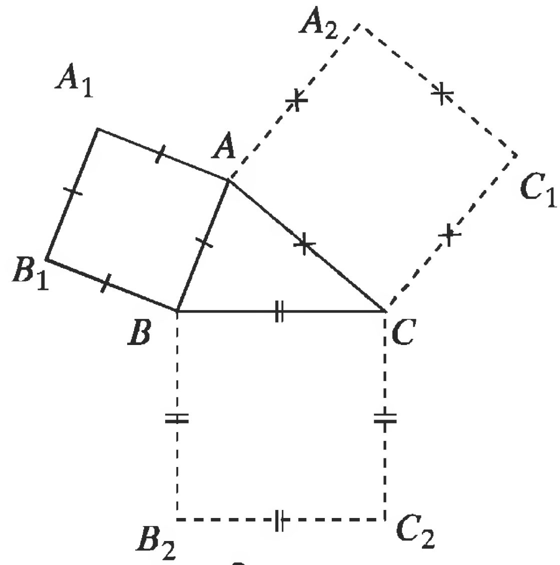
খ্রিষ্টের জন্মের প্রায় ৬০০ বছর আগে বিখ্যাত গ্রীক পন্ডিত সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে একটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্য (*Theorem*) বর্ণনা করেন। এই উপপাদ্যটি তার নামানুসারে পিথাগোরাসের উপপাদ্য বলে পরিচিত। জানা যায় তারও প্রায় ১০০০ বছর আগে মিশরীয় ভূমি জরিপকারীগণের এই উপপাদ্যটি সমন্ধে ধারনা ছিল। পিথাগোরাসের উপপাদ্য বিভিন্নভাবে প্রমাণ করা যায়। নিম্ন মাধ্যমিক পর্যায়ে এর দুইটি প্রমাণ দেওয়া আছে। তাই এখানে কোনো প্রমাণ দেওয়া হবে না। শিক্ষার্থীরা এর প্রমাণ অবশ্যই নিম্ন মাধ্যমিক জ্যামিতিতে করছে। এখানে শুধুমাত্র এর বর্ণনা ও কিছু আলোচনা থাকবে।

উপপাদ্য ৩.১

পিথাগোরাসের উপপাদ্য :

একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।

চিত্র ৩.২ এর ABC ত্রিভুজটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ। $\angle BAC$ সমকোন এবং BC অতিভুজ। BC অতিভুজের উপর কোনো বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করলে তার যে ক্ষেত্রফল হবে সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয় AB ও AC এর উপর বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করলে তাদের ক্ষেত্রফলের যোগফল তার সমান হবে।



চিত্র : ৩.২

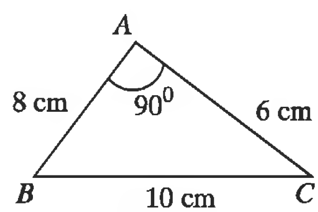
অর্থাৎ $BC^2 = AB^2 + AC^2$

এখানে $BC^2 = BB_2C_2C$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

$AB^2 = AA_1B_1B$ " "

$AC^2 = AA_2C_1C$ " "

উদাহরণ স্বরূপ, একটি সমকোণী ত্রিভুজের (চিত্র : ৩.৩) সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 8 সে.মি ও 6 সে.মি. হলে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের মাধ্যমে সহজেই বলা যায় এর অতিভুজের দৈর্ঘ্য 10 সে.মি. হবে।
অনুরূপভাবে, যেকোনো দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের মাধ্যমে তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য জানা সম্ভব।
নিম্নের উপপাদ্যেটি পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিপরীত প্রতিজ্ঞা হিসাবে পরিচিত।

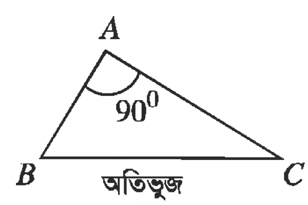


চিত্র : ৩.৩

উপপাদ্য ৩.২

কোনো ত্রিভুজের একটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান হলে শেষোক্ত বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণটি সমকোণ হবে। পাশের চিত্র (চিত্র : ৩.৪) লক্ষ্য কর।

ΔABC এর BC বাহু অতিভুজ এবং অপর দুই বাহু যথাক্রমে AB ও $AC.$



চিত্র : ৩.৪

BC বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রেফল অপর দুই বাহু AB ও AC এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।

অর্থাৎ, $BC^2 = AB^2 + AC^2$
সুতরাং, $\angle BAC$ একটি সমকোণ।

উদাহরণস্বরূপ আমরা বলতে পারি ΔABC এর AB, BC ও CA বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 8 সে.মি. 10 সে.মি. ও 6 সে.মি. হলে $\angle BAC$ অবশ্যই সমকোণ হবে।

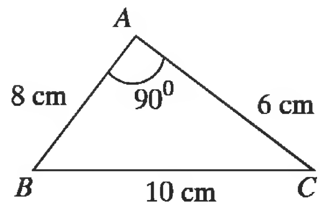
যেহেতু, $AB^2 = 8^2$ ব. সে. মি. = 64 ব. সে. মি.

$BC^2 = 10^2$ ব. সে. মি. = 100 ব. সে. মি.

$AC^2 = 6^2$ ব. সে. মি. = 36 ব. সে. মি.

$\therefore\ BC^2 = 100 = 36 + 64 = AB^2 + AC^2.$

$\therefore\ \angle BAC = 90^\circ$ = এক সমকোণ।

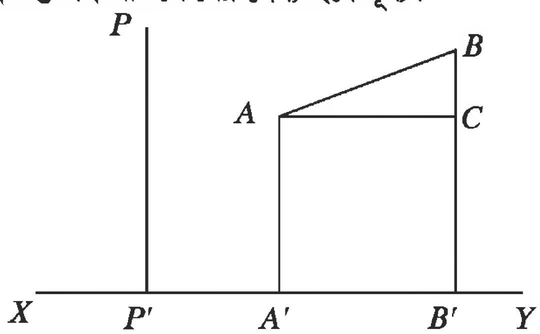


চিত্র ৩.৫

৩ (খ) লম্ব অভিক্ষেপ (Orthogonal Projection)

বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ : কোনো নির্দিষ্ট সরলরেখার ওপর কোনো বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ বলতে সেই বিন্দু থেকে উক্ত নির্দিষ্ট রেখার ওপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুকে বুঝায়।

মনেকরি, XY একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং P যেকোনো বিন্দু (চিত্র ৩.৬)। P বিন্দু থেকে XY রেখার ওপর অঙ্কিত লম্ব PP' এবং লম্ব PP' এর পাদবিন্দু P' ।
সুতরাং, P' বিন্দু XY রেখার ওপর P বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ। অর্থাৎ কোনো নির্দিষ্ট রেখার ওপর কোনো বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ একটি বিন্দু। আমরা এ ধারনা থেকে বলতে পারি কোনো সরলরেখার ওপর লম্ব যেকোনো সরলরেখার লম্ব অভিক্ষেপ একটি বিন্দু। সে ক্ষেত্রে উক্ত লম্ব অভিক্ষেপের দৈর্ঘ্য হবে শূন্য।



চিত্র : ৩.৬ নির্দিষ্ট রেখা XY এর উপর কোনো বিন্দু P এবং রেখাংশ AB এর লম্ব অভিক্ষেপ।

রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ :

ধরি, AB রেখাংশের প্রান্ত বিন্দুদ্বয় A ও B (চিত্র : ৩.৬)। এখন A ও B বিন্দু থেকে XY রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব যথাক্রমে AA' ও BB' । AA' লম্বের পাদবিন্দু A' এবং BB' লম্বের পাদবিন্দু B' । এই $A'B'$ রেখাংশই হচ্ছে XY রেখার উপর AB রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ।

সুতরাং, দেখা যাচ্ছে লম্ব অঙ্কনের মাধ্যমে অভিক্ষেপ নির্ণয় করা হয়। তাই $A'B'$ রেখাংশকে XY রেখার উপর AB রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ (*Orthogonal Projection*) বলা হয়।

লক্ষণীয় :

১। কোনো রেখার উপর কোনো বিন্দু থেকে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুই ঐ বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ।

২। কোনো রেখার উপর ঐ রেখার লম্ব রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ একটি বিন্দু। যার দৈর্ঘ্য শূন্য।

৩। কোন রেখার উপর ঐ রেখার সমান্তরাল কোনো রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপের দৈর্ঘ্য ঐ রেখাংশের দৈর্ঘ্যের সমান।

চিত্র ৩.৬ এ AB রেখাংশ XY এর সমান্তরাল হলে $AB = A'B'$ হবে।

কতিপয় গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্য

পীথাগোরাসের উপপাদ্যের উপর ভিত্তি করে এবং লম্ব অভিক্ষেপের ধারণার সাহায্যে আমরা এখন কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্যের যুক্তিমূলক প্রমাণ উপস্থাপন করা হলো।

উপপাদ্য ৩·৩

স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূলকোণের বিপরীত বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র ঐ কোণের সন্নিহিত অন্য দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফল এবং ঐ দুই বাহুর যেকোনো একটি ও তার উপর অপর বাহুর লম্ব অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণের সমষ্টির সমান।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি ABC ত্রিভুজের $\angle BCA$ স্থূলকোণ, AB স্থূলকোণের বিপরীত বহু এবং স্থূলকোণের সন্নিহিত বাহুদ্বয় যথাক্রমে BC ও AC

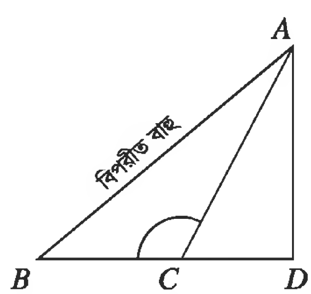
BC বাহুর বর্ধিতাংশের ওপর AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ CD (চিত্র : ৩.৭) । প্রমাণ করতে হবে যে,
$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC \cdot CD.$

প্রমাণ : BC বাহুর বর্ধিতাংশের ওপর AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ CD হওয়ায় ΔABD একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle ADB$ সমকোণ।

সুতরাং পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$
$$= AD^2 + (BC + CD)^2 \qquad [\because BD = BC + CD]$$
$$= AD^2 + BC^2 + CD^2 + 2BC \cdot CD.$$

$\therefore AB^2 = AD^2 + CD^2 + BC^2 + 2BC \cdot CD$..........(১)



চিত্র : ৩.৭

আবার ΔACD সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle ADC$ সমকোণ।

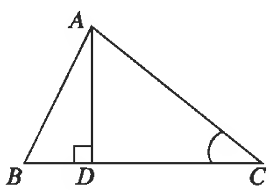
$\therefore AC^2 = AD^2 + CD^2$............(২)

(2) নং সমীকরণ হতে AC^2 এর মান (1) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,
$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC \cdot CD$ [প্রমাণিত]

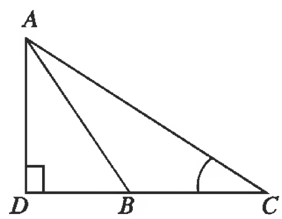
উপপাদ্য ৩·৪

যেকোনো ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি অপেক্ষা ঐ দুই বাহুর যেকোনো একটি ও তার উপর অপরটির লম্ব অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ পরিমাণ কম।

বিশেষ নির্বচন : ΔABC সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের $\angle C$ সূক্ষকোণ এবং সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহু AB । অপর দুই বাহু যাথাক্রমে AC ও BC । মনে করি, BC বাহুর উপর (চিত্র: ৩·৮–ক) এবং BC বাহুর বর্ধিতাংশের ওপর (চিত্র : ৩·৮–খ) লম্ব AD । তাহলে উভয় ত্রিভুজের ক্ষেত্রে BC বাহুর ওপর AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ CD ।



চিত্র : ৩·৮ (ক)



চিত্র: ৩·৮ (খ)

প্রমাণ : ΔABC এর $\angle ADB$ সমকোণ।

$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2$ [পীথাগোরাসের উপপাদ্য] **........** (১)

প্রথম চিত্রে $BD = BC - DC$

দ্বিতীয় চিত্রে $BD = DC - BC$

$\therefore$ উভয়ক্ষেত্রে $BD^2 = (BC - DC)^2 = (DC - BC)^2$

$$= BC^2 + DC^2 - 2BC \cdot DC$$

$$= BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \quad [CD = DC]$$

$\therefore \ BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD$..........(2)

এখন সমীকরণ (1) ও (2) হতে পাওয়া যায়

$AB^2 = AD^2 + BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD$

বা, $AB^2 = AD^2 + CD^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD$ ....(৩)

আবার ΔADC সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle D$ সমকোণ

$\therefore \ AC^2 = AD^2 + CD^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য] **............** (৪)

সমীকরণ (৩) ও (৪) হতে পাই,

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD.$ [প্রমাণিত]

বি. দ্র. : C বিন্দু থেকে AB এর উপর লম্ব অঙ্কনের মাধ্যমে একই ভাবে উপপাদ্যটি প্রমাণ করা যায়।

লক্ষণীয় :

১। সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে সমকোণের সন্নিহিত বাহুদ্বয় পরস্পর লম্ববিধায় তাদের প্রত্যেকটির উপর অপরটির লম্ব অভিক্ষেপ শূন্য। C কোণ সমকোণ হলে BC এর উপর AC এর লম্ব অভিক্ষেপ CD=O

সুতরাং $BC \cdot CD = 0$. ফলে $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2$

২। উপপাদ্য ৩.৩ ও উপপাদ্য ৩.৪, উপপাদ্য ৩.১ এর ভিত্তির উপর প্রতিষ্ঠিত। তাই উপপাদ্য ৩.৩ ও উপপাদ্য ৩.৪ কে উপপাদ্য ৩.১ অর্থাৎ পীথাগোরাসের উপপাদ্যের অনুসিদ্ধান্ত বলা যায়।

উপরোক্ত আলেচনা সাপেক্ষে গৃহিত সিদ্ধান্তসমূহ :

ΔABC এর ক্ষেত্রে,

১। $\angle C$ স্থূলকোণ হলে,

$AB^2 > AC^2 + BC^2$ [উপপাদ্য ৩.৩]

২। $\angle C$ সমকোণ হলে,

$AB^2 = AC^2 + BC^2$ [উপপাদ্য ৩.১]

৩। $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ হলে,

$AB^2 < AC^2 + BC^2$ [উপপাদ্য ৩.৪]

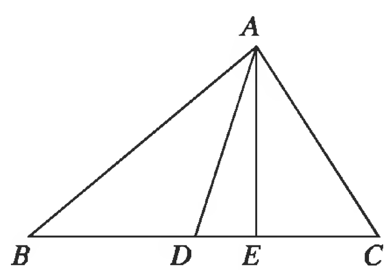
নিম্নোক্ত উপপাদ্যটি পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তার অর্থাৎ উপপাদ্য ৩.৩ ও উপপাদ্য ৩.৪ এর উপর ভিত্তি করে প্রতিষ্ঠিত। এই উপপাদ্যটি এ্যাপোলোনিয়াস কর্তৃক বর্ণিত বলে এটি এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য নামে পরিচিত।

উপপাদ্য ৩.৫

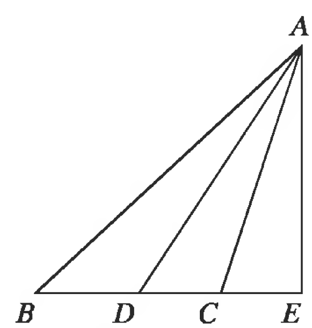
ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি, তৃতীয় বাহুর অর্ধেকের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল এবং ঐ বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির দ্বিগুণ।

বিশেষ নির্বচন : ΔABC এর AD মধ্যমা BC বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$



চিত্র : ৩.৯ (ক)



চিত্র : ৩.৯ (খ)

অঙ্কন : BC বাহুর উপর (চিত্র : ৩.৯ (ক)) এবং BC বাহুর বর্ধিতাংশের উপর (চিত্র ৩.৯ (খ)) AE লম্ব অঙ্কন করি।

প্রমাণ : ΔABD এর $\angle ADB$ স্থূলকোণ এবং BD রেখার বর্ধিতাংশের ওপর AD রেখার লম্ব অভিক্ষেপ DE [উভয় চিত্রে]।

স্থূলকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে [উপপাদ্য ৩.৩] আমরা পাই,

$AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD \cdot DE$ .... (1)

এখানে, ΔACD এর $\angle ADC$ সূক্ষ্মকোণ এবং DC রেখার (চিত্রে ৩.৯ (খ)) এবং DC রেখার বর্ধিতাংশের (চিত্রে ৩.৯ (খ)) ওপর AD রেখার লম্ব অভিক্ষেপ DE.

$\therefore$ সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে (উপপাদ্য ৩.৪) পাই,

$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2CD \cdot DE$............(২)

এখন সমীকরণ (১) ও (২) যোগ করে পাই,

$$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + BD^2 + CD^2 + 2BD \cdot DE - 2CD \cdot DE$$
$$= 2AD^2 + BD^2 + BD^2 + 2BD \cdot DE - 2BD \cdot DE \text{ ; } [\because BD = CD]$$
$$= 2AD^2 + 2BD^2$$
$$= 2(AD^2 + BD^2).$$ [প্রমাণিত]

সিদ্ধান্ত : এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যের মাধ্যমে ত্রিভুজের বাহু ও মধ্যমার সম্পর্ক নির্ণয় ।

মনে করি, ΔABC এর BC, CA ও AB বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b ও c । BC, CA ও AB বাহুর ওপর অঙ্কিত মধ্যমা AD, BE ও CF এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে d, e ও f.

তাহলে, এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য হতে পাই,

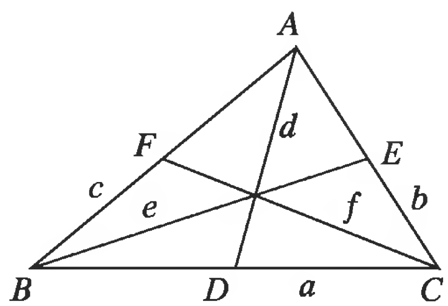
$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$$

বা, $c^2 + b^2 = 2\left(d^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2\right) \quad \left[\because BD = \frac{1}{2}a\right]$

বা, $b^2 + c^2 = 2d^2 + 2 \cdot \frac{1}{4}a^2$

বা, $b^2 + c^2 = 2d^2 + \frac{a^2}{2}$

বা, $d^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$



অনুরূপভাবে পাওয়া যায়,

$$e^2 = \frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4}$$

এবং $f^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$

$\therefore$ কোনো ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য জানা থাকলে মধ্যমাসমূহের দৈর্ঘ্য জানা যায়।

আবার,

$$d^2 + e^2 + f^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} + \frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4} + \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$$

$$= \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\therefore 3(a^2 + b^2 + c^2) = 4(d^2 + e^2 + f^2).$$

সুতরাং বলা যায় কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র সমূহের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির তিনগুণ উক্ত ত্রিভুজের মধ্যমা ত্রয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রসমূহের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির চার গুণের সমান।

ত্রিভুজটি সমকোণী অর্থাৎ $\angle C$ = সমকোণ এবং AB অতিভুজ হলে

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\therefore \quad a^2 + b^2 + c^2 = 2c^2$$

বা, $\frac{4}{3}(d^2 + e^2 + f^2) = 2c^2$

বা, $2(d^2 + e^2 + f^2) = 3c^2$.

সুতরাং, বলা যায় সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রসমূহের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির দ্বিগুণ অতিভুজের ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের তিণগুণের সমান।

অনুশীলনী ৩·১

১। ΔABC এর $\angle B = 60^\circ$ হলে প্রমাণ কর যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - AB \cdot BC$

২। ΔABC এর $\angle B = 120^\circ$ হলে প্রমাণ কর যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 + AB \cdot BC$

৩। ΔABC এর $\angle C = 90^\circ$ এবং BC এর মধ্যবিন্দু D। প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AD^2 + 3BD^2$

৪। ΔABC এ AD, BC বাহুর উপর লম্ব এবং BE, AC এর ওপর লম্ব। দেখাও যে,
$BC \cdot CD = AC \cdot CE$

৫। ΔABC এর BC বাহু P ও Q বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে। প্রমাণ কর যে,
$AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$.

[সংকেত : $BP = BQ = QC$; ΔABQ এর মধ্যমা AP.

$AB^2 + AQ^2 = 2 \cdot (BP^2 + AP^2) = 2PQ^2 + 2AP^2$

ΔAPC এর মধ্যমা AQ,

$AP^2 + AC^2 = 2PQ^2 + 2AQ^2$

৬। ΔABC এর $AB = AC$। ভূমি BC এর উপর P যেকোনো বিন্দু। প্রমাণ কর যে,
$AB^2 - AP^2 = BP \cdot PC.$

[সংকেত : BC এর উপর AD লম্ব আঁক তাহলে $AB^2 = BD^2 + AD^2$ এবং $AP^2 = PD^2 + AD^2$]

৭। ΔABC এর মধ্যমাত্রয় G বিন্দুতে মিলিত হলে প্রমাণ কর যে,
$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

[**সংকেত** : এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যের আলোকে গৃহীত সিদ্ধান্ত সমূহ দেখতে হবে অর্থাৎ, ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য ও মধ্যমার সম্পর্ক দেখতে হবে]

৩ (গ) ত্রিভুজ ও বৃত্ত বিষয়ক উপপাদ্য

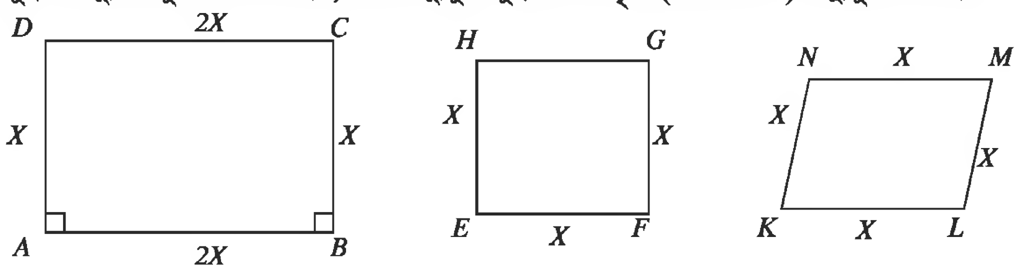
এই অংশে ত্রিভুজ ও বৃত্ত বিষয়ক কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্যের যুক্তিমূলক প্রমাণ উপস্থাপন করা হবে। উপপাদ্যসমূহ প্রমাণের জন্য দুইটি ত্রিভুজের সদৃশতা সর্ম্পকে পূর্বজ্ঞান থাকা আবশ্যক। মাধ্যমিক জ্যামিতিতে ত্রিভুজের সদৃশতা সর্ম্পকে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে। এই উপপাদ্যগুলো প্রমাণের পূর্বে শিক্ষার্থীরা ত্রিভুজের সদৃশতা সম্পর্কে জেনে নিবে। শিক্ষার্থীদের সুবিধার্থে ত্রিভুজের সদৃশতা সর্ম্পকে সংক্ষেপে আলোচনা করা হলো।

কোণের ক্ষেত্রে সদৃশতা : সমান সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি বহুভুজের একটির কোণগুলো যদি ধারাবাহিকভাবে অপরটির কোণগুলোর সমান হয়, তবে বহুভুজ দুইটিকে সদৃশকোণী বহুভুজ বলা হয়।

বাহুর অনুপাতের ক্ষেত্রে সদৃশতা : সমান সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি বহুভুজের একটির শীর্ষ বিন্দুগুলোকে যদি ধারাবাহিকভাবে অপরটির শীর্ষবিন্দুগুলোর সঙ্গে এমনভাবে মিল করা যায় যে, বহুভুজ দুইটির–

(১) অনরূপ কোণগুলো সমান হয় এবং

(২) অনুরূপ দুইটি বাহুর অনুপাত সমান হয়, তবে বহুভুজ দুইটিকে সদৃশ $(Similar)$ বহুভুজ বলা হয়।



চিত্র ৩.১০

উপরের চিত্রে লক্ষ করলে দেখব যে,

(১) আয়ত $ABCD$ ও বর্গ $EFGH$ সদৃশ নয় যদিও তারা সদৃশকোণী।

(২) বর্গ $EFGH$ ও রম্বস $KLMN$ সদৃশ নয় যদিও তাদের শীর্ষবিন্দুগুলোর যেকোনো ধারাবাহিক মিলকরণের ফলে অনুরূপ বাহু দুইটির অনুপাতগুলো সমান হয়।

দুইটি ত্রিভুজের বেলায় অবশ্য এ রকম হয় না। দুইটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলোর কোণ মিলকরণের ফলে যদি সদৃশতার সংজ্ঞায় উল্লেখিত শর্ত দুইটির একটি সত্য হয়, তবে অপরটিও সত্য হয় এবং ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ হয়।

এ প্রসঙ্গে উল্লেখ্য যে,

(১) দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে সমান কোণ দুইটিকে অনুরূপ কোণ এবং অনুরূপ কোণের বিপরীত বাহু দুইটিকে অনুরূপ বাহু ধরা হয়।

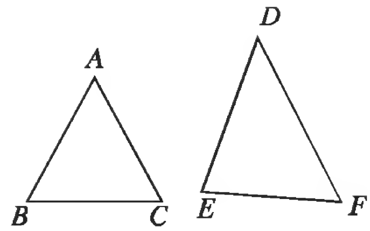
(২) দুইটি ত্রিভুজের একটির তিন বাহু অপরটির তিন বাহুর সমানুপাতিক হলে, আনুপাতিক বাহু দুইটিকে অনুরূপ বাহু এবং অনুরূপ বাহুর বিপরীত কোণ দুইটিকে অনুরূপ কোণ ধরা হয়।

(৩) উভয়ক্ষেত্রে অনুরূপ কোণগুলোর শীর্ষবিন্দু মিল করে ত্রিভুজ দুইটি বর্ণনা করা হয়। যেমন, ΔABC ও ΔDEF এর অনুরূপ কোণগুলো হচ্ছে $\angle A$ ও $\angle D$, $\angle B$ ও $\angle E$, $\angle C$ ও $\angle F$ এবং অনুরূপ বাহুগুলো হচ্ছে AB ও DE, AC ও DF, BC ও EF.।

দুইটি ত্রিভুজের সদৃশতা সম্পর্কিত কয়েকটি উপপাদ্যের সংক্ষিপ্ত বর্ণনা দেওয়া হলো।

উপপাদ্য ৩·৬

দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে তাদের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক হবে।



চিত্র : ৩·১১

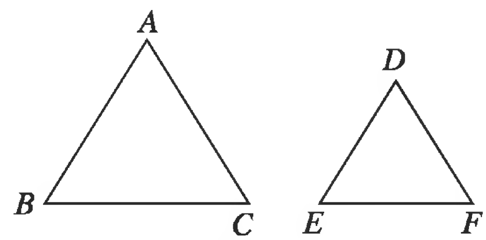
পার্শ্বের চিত্রে ΔABC ও ΔDEF সদৃশকোণী ত্রিভুজ।
অর্থাৎ, $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$. হওয়ায়
$\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$ হবে। অর্থাৎ অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক হবে।

অনুসিদ্ধান্ত : দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে, তারা সদৃশ হয়।

মন্তব্য : দুইটি ত্রিভুজের একটির দুই কোণ অপরটির দুই কোণের সমান হলে ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী এবং এর ফলে এগুলো সদৃশ হয়। কারণ যেকোনো ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ।

উপপাদ্য ৩·৭

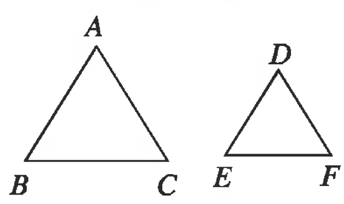
দুইটি ত্রিভুজে বাহুগুলো সমানুপাতিক হলে অনুরূপ বাহুর বিপরীত কোণগুলো পরস্পর সমান হয়।
পার্শ্বের চিত্রে ΔABC ও ΔDEF এর বাহুগুলো সমানুপাতিক অর্থাৎ,
$\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$ হওয়ায় ত্রিভুজদ্বয়ের কোণগুলো পরস্পর সমান। অর্থাৎ, $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$. ।
উপপাদ্য ৩.৭ কে উপপাদ্য ৩.৬ এর বিপরীত হিসাবেও বলা যেতে পারে।



চিত্র ৩·১২

উপপাদ্য ৩·৮

দুইটি ত্রিভুজের একটির এক কোণ অপরটির এক কোণের সমান এবং সমান কোণ সংলগ্ন বাহুগুলো সমানুপাতিক হলে ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ হবে।
পার্শ্বের চিত্রের (চিত্র : ৩.১৩) ΔABC ও ΔDEF এর $\angle A = \angle D$ এবং সমান কোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয় AB, AC এবং DE ও DF সমানুপাতিক। অর্থাৎ, $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$ হওয়ায় ΔABC ও ΔDEF সদৃশ।



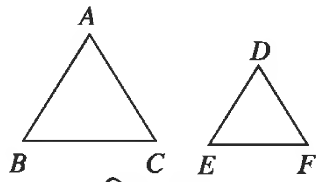
চিত্র : ৩.১৩

উপপাদ্য ৩.৯

দুইটি সদৃশ ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত তাদের যেকোনো দুই অনুরূপ বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাতের সমান।

পার্শ্বের চিত্রের ΔABC ও ΔDEF ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ। ত্রিভুজ দুইটির অনুরূপ বাহু BC ও EF। এই অবস্থায় ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের অনুপাত BC ও EF বাহুদ্বয়ের ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাতের সমান।

অর্থাৎ $\dfrac{\Delta ABC}{\Delta DEF}=\dfrac{BC^2}{EF^2}$।



চিত্র : ৩.১৪

ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্ব বিন্দু

এখানে উল্লেখ্য, কোনো ত্রিভুজের লম্ব বিন্দু থেকে শীর্ষের দূরত্ব ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র থেকে ঐ শীর্ষের বিপরীত বাহুর লম্ব দূরত্বের দ্বিগুণ।

ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র : ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুকে ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র বলা হয়।

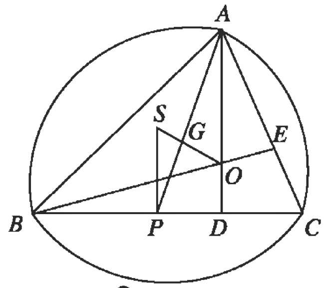
লম্ববিন্দু : ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো হতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বগুলো যে বিন্দুতে ছেদ করে তাহাই লম্ববিন্দু।

ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র : ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর লম্ব–সমদ্বিখণ্ডক যে বিন্দুতে ছেদ করে তাকে ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র বলে।

উপপাদ্য ৩.১০

ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্ব বিন্দু সমরেখ।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC এর লম্ব বিন্দু O পরিকেন্দ্র S এবং AP একটি মধ্যমা। লম্ব বিন্দু O এবং পরিকেন্দ্র S এর সংযোগ রেখা AP মধ্যমাকে G বিন্দুতে ছেদ করেছে। S, P যোগ করলে SP রেখা BC এর উপর লম্ব। তাহলে, G বিন্দুটি ΔABC এর ভরকেন্দ্র এটি প্রমাণ করাই যথেষ্ট হবে।



চিত্র ৩.১৫

প্রমাণ : ΔABC এর লম্ব বিন্দু O থেকে A শীর্ষের দূরত্ব OA এবং পরিকেন্দ্র S থেকে A শীর্ষের বিপরীত বাহু BC এর দূরত্ব SP।

$\therefore\ OA = 2SP$ .... (১)

এখন যেহেতু AD ও SP উভয়ই BC এর ওপর লম্ব সেহেতু $AD \parallel SP$.

এখন $AD \parallel SP$ এবং AP এদের ছেদক।

$\therefore \angle PAD = \angle APS$ [একান্তর কোণ]

অর্থাৎ, $\angle OAG = \angle SPG$

এখন ΔAGO এবং ΔPGS এর মধ্যে

$\angle AGO = \angle PGS$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\angle OAG = \angle SPG$ [একান্তর কোণ]

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle$AOG = অবশিষ্ট $\angle PSG$

$\therefore$ ΔAGO এবং ΔPGS সদৃশ কোণী।

সুতরাং, $\dfrac{AG}{GP} = \dfrac{OA}{SP}$

বা, $\dfrac{AG}{GP} = \dfrac{2SP}{SP}$ [(১) নং সমীকরণ হতে]

বা, $\dfrac{AG}{GP} = \dfrac{2}{1}$

$\therefore$ $AG : GP = 2 : 1$

অর্থাৎ, G বিন্দু AP মধ্যমাকে $2 : 1$ অনুপাতে বিভক্ত করেছে।

$\therefore$ G বিন্দু ΔABC এর ভরকেন্দ্র। (প্রমাণিত)

দ্রষ্টব্য : (১) নববিন্দুবৃত্ত (*Nine Point Circle*) : কোনো ত্রিভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুত্রয়, শীর্ষবিন্দুগুলো থেকে বিপরীত বাহুত্রয়ের উপর অঙ্কিত লম্বত্রয়ের পাদ বিন্দুত্রয় এবং শীর্ষবিন্দু ও লম্ববিন্দুর সংযোজক রেখাত্রয়ের মধ্যবিন্দুত্রয়, সর্বমোট এই নয়টি বিন্দু একই বৃত্তের উপর অবস্থান করে। এই বৃত্তকেই নববিন্দুবৃত্ত বলে।

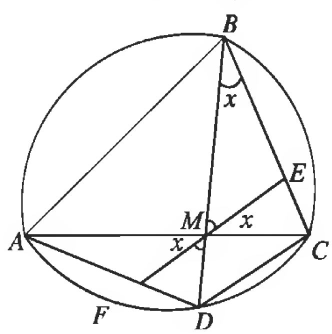
(২) ত্রিভুজের লম্ব বিন্দু ও পরিকেন্দ্র সংযোজন করে উৎপন্ন রেখাংশের মধ্যবিন্দুই নববিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র।

(৩) নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধের অর্ধেকের সমান।

উপপাদ্য ৩.১১ (ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্য)

বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোনো চতুর্ভুজের কর্ণ দুইটি যদি পরস্পর লম্ব হয়, তবে তাদের ছেদ বিন্দু হতে কোনো বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব বিপরীত বাহুকে দ্বিখণ্ডিত করে।

বিশেষ নির্বাচন : বৃত্তে অন্তর্লিখিত $ABCD$ চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় AC ও BD পরস্পরকে M বিন্দুতে ছেদ করে। M হতে BC বাহুর ওপর ME লম্ব এবং বর্ধিত EM বিপরীত AD বাহুকে F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে $AF=FD$



চিত্র : ৩.১৬

প্রমাণ: $\angle CBD = \angle CAD$ (একই চাপ CD ওপর দণ্ডায়মান বলে)

অর্থাৎ $\angle CBM = \angle MAF$

আবার, $\angle CBM = \angle CME$ (উভয়ে একই $\angle BME$ এর পূরক কোণ বলে)

সুতরাং $\angle MAF = \angle FMA$

ফলে AFM ত্রিভুজে $AF = FM$

অনুরূপভাবে দেখা যায় যে,

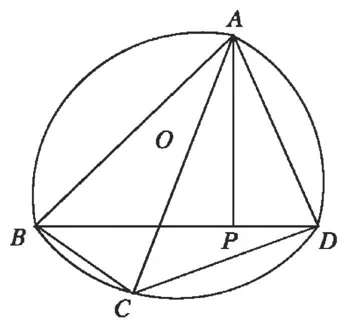
$\angle FDM = \angle BCM = \angle BME = \angle DMF$

ফলে, DFM ত্রিভুজে $FD = FM$.

সুতরাং $AF = FD$.

উপপাদ্য ৩.১২ (টলেমির উপপাদ্য)

বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোনো চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র ঐ চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমষ্টির সমান।



চিত্র : ৩.১৭

বিশেষ নির্বচন : মনে করি বৃত্তে অন্তর্লিখিত $ABCD$ চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো যথাক্রমে AB ও CD এবং BC ও AD। AC এবং BD চতুর্ভুজটির দুইটি কর্ণ। প্রমাণ করতে হবে যে, $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$.

অঙ্কন : $\angle BAC$ কে $\angle DAC$ থেকে ছোট ধরে নিয়ে A বিন্দুতে AD রেখাংশের সাথে $\angle BAC$ এর সমান করে $\angle DAP$ আঁকি যেন AP রেখা BD কর্ণকে P বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে $\angle BAC = \angle DAP$

উভয়পক্ষে $\angle CAP$ যোগ করে পাই,

$\angle BAC + \angle CAP = \angle DAP + \angle CAP$

অর্থাৎ, $\angle BAP = \angle CAD$

এখন ΔABP ও ΔACD এর মধ্যে

$\angle BAP = \angle CAD$

$\angle ABD = \angle ACD$ [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান বলে]

এবং অবশিষ্ট $\angle APB =$ অবশিষ্ট $\angle ADC$

$\therefore$ ΔABD ও ΔACD সদৃশকোণী।

$\therefore \dfrac{BP}{CD} = \dfrac{AB}{AC}$

অর্থাৎ, $AC \cdot BP = AB \cdot CD$ .... (১)

আবার, ΔABC ও ΔAPD এর মধ্যে

$\angle BAC = \angle PAD$ [অঙ্কন অনুসারে]

$\angle ADP = \angle ACB$ [একটি বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান বলে]

এবং অবশিষ্ট $\angle ABC =$ অবশিষ্ট $\angle APD$

$\therefore$ ΔABC ও ΔAPD সদৃশকোণী।

$\therefore \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{PD}{BC}$

অর্থাৎ, $AC \cdot PD = BC \cdot AD$ .... (২)

এখন সমীকরণ (1) ও (2) যোগ করে পাই,

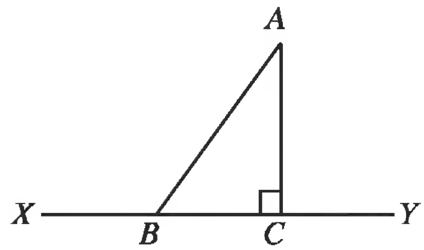
$AC \cdot BP + AC \cdot PD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$

বা, $AC(BP + PD) = AB \cdot CD + BC \cdot AD$

অর্থাৎ, $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$ [যেহেতু $BP + PD = BD$] [প্রমাণিত]

অনুশীলনী ৩·২

১।

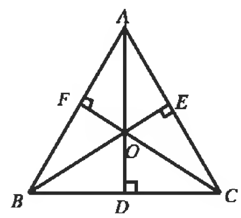


XY রেখাংশে AB এর লম্ব অভিক্ষেপ নিচের কোনটি?

ক. AB খ. BC

গ. AC ঘ. XY

২।



উপরের চিত্রে কোনটি লম্ব বিন্দু?

ক. D খ. E

গ. F ঘ. O

৩। i ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের ছেদ বিন্দুকে ভর কেন্দ্র বলে।

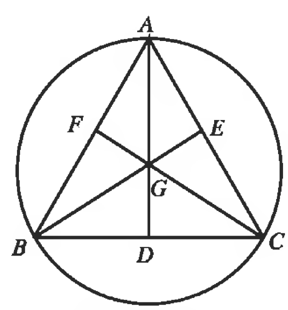
ii ভরকেন্দ্র যেকোনো মধ্যমাকে 3:1 অনুপাতে বিভক্ত করে।

iii সদৃশ কোণী ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক

নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. ii ও iii

গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii



D, E, F যথাক্রমে BC, AC ও AB এর মধ্যবিন্দু হলে ওপরের চিত্রের আলোকে ৪–৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

৪। G বিন্দুর নাম কি?

ক. লম্ব বিন্দু খ. অন্ত:কেন্দ্র

গ. ভরকেন্দ্র ঘ. পরিকেন্দ্র

৫। ΔABC এর শীর্ষ বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত বৃত্তের নাম কি?

ক. পরিবৃত্ত খ. অন্ত:বৃত্ত

গ. বহি:বৃত্ত ঘ. নববিন্দু বৃত্ত

৬। ΔABC এর ক্ষেত্রে নিচের কোনটি এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যকে সমর্থন করে?

ক. $AB^2 + AC^2 = BC^2$

খ. $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

গ. $AB^2 + AC^2 = 2(AG^2 + GD^2)$

ঘ. $AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + CD^2)$

৭। ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তস্থ যেকোনো P বিন্দু থেকে BC ও CA এর ওপর PD ও PE লম্ব অঙ্কন করা হয়েছে। যদি ED রেখাংশ AB কে O বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে, PO রেখা AB এর উপর লম্ব। অর্থাৎ $PO \perp AB$.

৮। ΔABC এর $\angle C$ সমকোণ। C থেকে অতিভুজের ওপর অঙ্কিত লম্ব CD হলে, প্রমাণ কর যে, $CD^2 = AD \cdot BD$.

৯। ΔABC এর শীর্ষত্রয় থেকে বিপরীত বাহুগুলোর ওপর লম্ব AD, BE ও CF রেখাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AO \cdot OD = BO \cdot OE = CO \cdot OF$.

[সংকেত : ΔBOF এবং ΔCOE সদৃশ।

$\therefore BO : CO = OF : OE$]

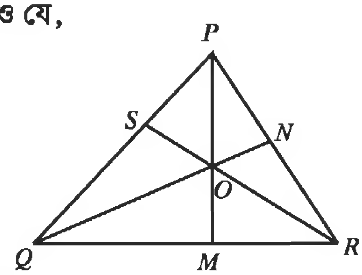
১০। AB ব্যাসের ওপর অঙ্কিত অর্ধবৃত্তের দুইটি জ্যা AC ও BD পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC \cdot AP + BD \cdot BP$

১১। কোনো সমবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ $3 \cdot 0$ সে.মি. হলে ঐ ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

১২। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A হতে ভূমি BC এর ওপর অঙ্কিত লম্ব AD এবং ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ R হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 = 2R \cdot AD$. [ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্যে $AB = AC$]

১৩। ABC ত্রিভুজের $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক BC কে D বিন্দুতে এবং ABC পরিবৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। দেখাও যে, $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC.$

১৪। ABC ত্রিভুজের AC ও AB বাহুর উপর যথাক্রমে BE ও CF লম্ব। দেখাও যে, $\Delta ABC : \Delta AEF = AB^2 : AE^2.$



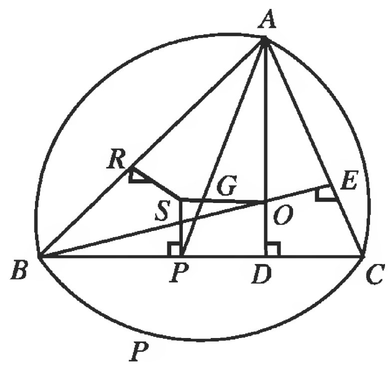
১৫। ΔPQR –এ PM, QN ও RS মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

ক. O বিন্দুটির নাম কি? O বিন্দু PM কে কি অনুপাতে বিভক্ত করে?

খ. ΔPQR হতে $PQ^2 + PR^2 = 2(PM^2+QM^2)$ সম্পর্কটি প্রতিষ্ঠিত কর।

গ. দেখাও যে, ΔPQR –এর বাহু তিনটির বর্গের সমষ্টি O বিন্দু হতে শীর্ষবিন্দু তিনটির দূরত্বের বর্গের সমষ্টির তিনগুণ।

১৬।



উপরের চিত্রে S, O যথাক্রমে ΔABC এর পরিকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু। AP মধ্যমা, BC =a, AC = b এবং AB = c

ক. OA এবং SP এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

খ. দেখাও যে, S, G, O একই সরল রেখায় অবস্থিত।

গ. $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ হলে a.CD = b.CE সমীকরণটি প্রতিষ্ঠিত কর।